1. Halle la solución general de $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$ en $(0, +\infty)$.

Solución: La ecuación dada es una ecuación de Euler. Se puede hacer la sustitución $x = e^t$, o sea $t = \ln x$.

Observe que: $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} = e^{-t}$ Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t} \\ y'' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} e^{-2t} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-e^{2t}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \cdot e^{-2t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$\begin{aligned} 4e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t} + 8e^t\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right) + y &= 0 \\ \text{o sea,} \quad 4y'' + 4y' + y &= 0. \end{aligned}$$

Ahora tenemos la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes. El polinomio auxiliar es:

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 &= 0 \\ (2\lambda + 1)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

El número $-\frac{1}{2}$ tiene multiplicidad 2, entonces la solución general es: $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{1}{2}t}$
Recordando que, $t = \ln x$, obtenemos la solución general de la ecuación dada:
$y = \dfrac{C_1}{\sqrt{x}} + \dfrac{C_2 \ln x}{\sqrt{x}}$

2. Halle la solución general de

$$\vec{X}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^t & \cos t \\ e^t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Solución:

3. Hallar la solución de la ecuación $y'' - 6y' + 9y = e^{3t} + 1$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Solución:

4. Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de $L_2(y) = 0$ en el intervalo (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Pruebe que:

a) y_1 e y_2 no pueden anularse simultáneamente en x_0

b) y_1 e y_2 no pueden alcanzar simultáneamente un extremo relativo en x_0.

Solución: Si (y_1, y_2) un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $l_2(y) = 0$ en el intervalo $(a;b)$, entonces cada solución $\varphi(x)$ de esta ecuación, que es diferente de 0 en el punto $x_0 \in (a;b)$ se puede representar (anotar) como combinación lineal del sistema de soluciones fundamentales $\varphi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ (1)
Como $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones independientes, y $\varphi(x_0) \neq 0$, entonces de (1) sigue que $y_1(x_0)$ y $y_2(x_0)$ no pueden anularse simultáneamente.

5. Halle la solución general de

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

Solución:

6. Halle la solución de la ecuación $y'' + y = 4e^t \cos t$
que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 4, y'(0) = -3$.

Solución:

7. Considere las funciones
$y_1 = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $y_1 =| x | \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, en el intervalo $(-2, 2)$.

a) Demuestre que y_1 e y_2 son funciones linealmente independientes en el intervalo $(-2, 2)$.

b) ¿Por qué estas funciones no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea con coeficientes continuos en $(-2, 2)$?

Solución:

a) Sean r_1 y r_2 números reales tales que $r_1y_1 + r_2y_2 = 0$ en I=(-2;2)
Entonces, $r_1 x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + r_2|x| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$ para todo x en I.
Evaluando en $x_1 = 1$ y en $x_2 = -1$ se obtiene $r_1 + r_2 = 0$, $r_1 - r_2 = 0$, es decir, $r_1 = r_2 = 0$. Por tanto $\{y_1, y_2\}$ es linealmente independiente sobre $I = (-2; 2)$.

b) Si $\{y_1, y_2\}$ fuese un conjunto fundamental de soluciones de un tal EDO, debería existir un x_0 en $I = (-2; 2)$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$.
Sin embargo, si $x_0 \leq 0$

$$W(y_1, y_2)(x_0) = det \begin{pmatrix} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & - & x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)' & - & \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)' \end{pmatrix}_{x=x_0} = 0$$

pues sus columnas son dependientes, y
si $x_0 \geq 0$

$$W(y_1, y_2)(x_0) = det \begin{pmatrix} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)' & \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)' \end{pmatrix}_{x=x_0} = 0 ,$$

pues tiene dos columnas iguales.